Matemáticas 3 | Trimestre 1

Ecuaciones cuadráticas. Escala de probabilidad. Teorema de Pitágoras

Prioriza Matemáticas 3 te ayudará a trabajar en los siguientes aprendizajes.

1. Resolver problemas mediante la formulación y la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas
2. Calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes
3. Formular, justificar y usar el teorema de Pitágoras

1 Ecuaciones cuadráticas

Cuando un número se multiplica por sí mismo, se dice que está "**elevado al cuadrado**"; esto se representa como $(a)(a) = a^2$. Por ejemplo, "Tres elevado al cuadrado" = $3^2 = (3)(3) = 9$.

También se dice "un número al cuadrado" o "el cuadrado de un número". Por ejemplo, el cuadrado de 1.5 es 2.25, pues 1.52 = (1.5)(1.5) = 2.25.

Cuando se trabaja con expresiones algebraicas y ecuaciones, la **literal** (letra) que más se emplea para representar una variable o incógnita es la x, pero también es correcto utilizar cualquier otra literal (incluso pueden usarse mayúsculas). Los siguientes ejemplos son tres maneras distintas de expresar algebraicamente que el cuadrado de un número más el doble del mismo número es igual a 8.

- $y^2 + 2y = 8$
- $A^2 + 2A = 8$
- $n^2 + 2n = 8$

Un limón, por su forma, puede ser una variedad algebraica cuya ecuación es $x^2 + z^2 = y^3(1 - y)^3$.

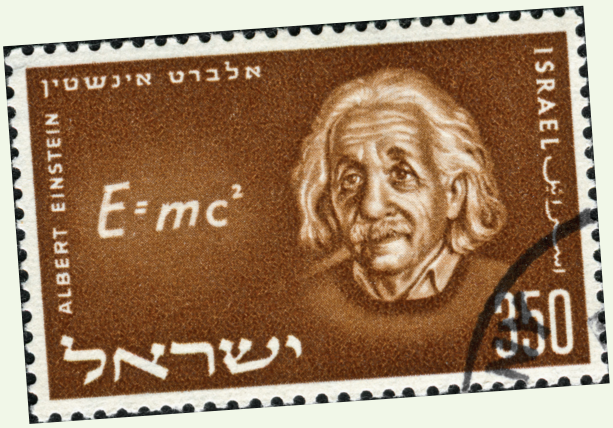
En el siguiente video se explican las características principales de las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-01

El **grado de una ecuación** se refiere a la **potencia más grande** a la que está elevada la incógnita; por ejemplo:

- la ecuación $3x^2 - x + 10 = 80$ es de segundo grado (grado 2), pues el mayor exponente de la incógnita es 2;
- la ecuación $y^3 + y = 10$ es de tercer grado (grado 3), pues el mayor exponente de y es 3;
- la ecuación $4z - 1 = 11$ es de primer grado, pues la z solo aparece elevada a la potencia 1 (por convención, el exponente 1 no suele escribirse).

La **solución** o las soluciones de una ecuación son los **valores de la incógnita** que hacen verdadera la igualdad (hacen que se cumpla). Por ejemplo, 11 es una solución de la ecuación $2x^2 - 10x = 132$, pues si se sustituye la incógnita (x) por 11 y se efectúan las operaciones correspondientes, se cumple la igualdad $2(11^2) - 10(11) = 2(121) - 110 = 242 - 110 = 132$.

La otra solución es -6, pues $2(-6^2) - 10(-6) = 2(36) + 60 = 72 + 60 = 132$. Es decir, hay ecuaciones de segundo grado con dos soluciones.



En 1905, Albert Einstein presentó una de las ecuaciones más famosas de la historia sobre la equivalencia de la materia y la energía.

Algunas ecuaciones de segundo grado pueden resolverse con el "**camino de regreso**", es decir, partir del resultado y efectuar operaciones inversas hasta hallar el valor de la incógnita. Por ejemplo, si un número n se eleva al cuadrado, se resta 10 y resulta 54, la ecuación correspondiente es $n^2 - 10 = 54$. El camino de regreso es el que se describe enseguida:

- $54 + 10 = 64$ (como lo último que se hizo fue restar 10, ahora se suma 10 para revertir ese paso, es decir, volver al resultado de elevar al cuadrado n);
- como el primer paso fue elevar al cuadrado, ahora se obtienen las dos raíces de 64, de modo que las dos soluciones son $n_1 = 8$ y $n_2 = -8$, es decir, el número original (n) era 8 o -8.

1. Lee y escribe en la tabla la expresión algebraica que corresponde a cada una de las columnas.

   a) El sueldo mensual de Pedro en pesos.
   b) El supervisor de la empresa gana el doble de lo que gana Pedro.
   c) El ingeniero gana \$3000.00 mensuales menos que el supervisor.
   d) Ana gana 10% menos que Pedro.
   e) Al señor que hace el aseo le faltan \$800.00 para ganar $\frac{3}{4}$ partes del salario que percibe Pedro.

Empleado	Pedro	Supervisor	Ingeniero	Ana	Señor de la limpieza
Expresión algebraica	x	$2x$	$2x - 3000$	$0.9x$	$\frac{3}{4}x - 800$

2. Lee y haz lo que se solicita.
   Raúl y Marcos han comprado caramelos. Raúl sale de la tienda con una bolsa de palomitas de maíz y una de galletas; en total gasta \$140.00. Marcos ha comprado una bolsa de palomitas y dos bolsas de galletas; en total gasta \$200.00. Para resolver lo siguiente, toma en cuenta que la letra x representa el costo de una bolsa de palomitas y la letra y el costo de una bolsa de galletas.

   a) Completa la ecuación, la cual representa la cantidad de dinero que gastó

      Raúl: $x +$ ___y___ $= 140$.

   b) Completa la ecuación, que indica el monto total de lo que gastó Marcos

      en la tienda: $x + y =$ ___$x + 2y = 200$___.

   c) Resuelve las ecuaciones con el método que quieras y comprueba que las soluciones son correctas. $x = 80$; $y = 60$

TEN PRESENTE

- Elevar al cuadrado un número significa multiplicarlo por sí mismo.
- El grado de una ecuación corresponde al mayor exponente de la incógnita.
- Comúnmente se usa la literal x para representar cantidades que son variables o desconocidas.
- Encontrar el valor o los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad.
- Una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones.

Escala de probabilidad

2

El **espacio muestral** de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles. Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado de seis caras y una moneda juntos el espacio muestral es {(1, A), (1, S), (2, A), (2, S), (3, A), (3, S), (4, A), (4, S), (5, A), (5, S), (6, A), (6, S)}.

Aprende más sobre el espacio muestral de un experimento en el video.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-05

La **probabilidad** de un evento es la **razón** entre el número de resultados **favorables** y el de resultados posibles. Por ejemplo, si se lanza un dado de seis caras, la probabilidad de que caiga un número par es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, pues hay tres resultados favorables (2, 4, 6) de seis posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Existe la misma probabilidad de que al lanzar un dado caiga un número par que uno impar.

La probabilidad de un evento puede expresarse en forma de **fracción**, como número **decimal** o en **porcentaje**. Por ejemplo, si se lanzan tres monedas juntas, la probabilidad de que caigan solo caras iguales (tres águilas o tres soles) es…

- en forma de fracción, $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$;
- como número decimal, 0.25;
- como porcentaje, 25%.

La probabilidad de un **evento imposible** es 0; la de un **evento seguro** es 1. Para **eventos probables** (que no se sabe si ocurrirán o no) la probabilidad es un número entre 0 y 1.

En este enlace el video muestra cómo calcular la probabilidad de un evento en un contexto de pelotas de colores en una urna.
www.e-sm.com.mx/Ced-M3-06

Lee el ejemplo:

Tres personas tienen tres dulces, uno de uva y dos de naranja; todas quieren el dulce de uva, por lo que los introducen en un bolsa, en orden y sin ver. Cada una mete la mano a la bolsa y saca un dulce. ¿Quién tiene mayor posibilidad de sacar el dulce de uva? ¿Lo sabes? La probabilidad, en principio, es la misma para todos; sin embargo, si la primera persona no saca el dulce de fresa, la segunda tiene 50% de probabilidad de sacarlo y si esta tampoco lo saca, la probabilidad del último participante será 1, pues es un evento seguro.

Se dice que dos eventos son **mutuamente excluyentes** si no pueden ocurrir de manera simultánea.

Por ejemplo, para el lanzamiento de dos dados, los eventos "Que la suma sea impar" y "Que caigan caras iguales" son mutuamente excluyentes, ya que la suma de caras iguales siempre da un número par:

$$1 + 1 = 2;\ 2 + 2 = 4;\ 3 + 3 = 6;\ 4 + 4 = 8;\ 5 + 5 = 10;\ 6 + 6 = 12$$

Los **eventos complementarios** son aquellos que, además de ser mutuamente excluyentes, abarcan todo el espacio muestral.

Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado los eventos "Que caiga número par" y "Que caiga 1, 3 o 5" son complementarios, pues 1, 3 y 5 no son pares, y además cualquier elemento del espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6} cumple alguna de las dos características (ser par, o ser 1, 3 o 5).

Los eventos complementarios siempre son mutuamente excluyentes, pero la afirmación recíproca no es verdadera; es decir, hay eventos mutuamente excluyentes que no son complementarios.

Al lanzar una moneda al aire es imposible que caiga al mismo tiempo "águila" y "sol"; por tanto, son eventos mutuamente excluyentes y complementarios, pues abarcan todo el espacio muestral.

1. Calcula la probabilidad de los eventos al girar la ruleta.

a) Un número impar: $\frac{1}{2}$

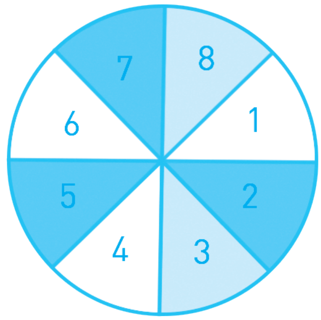
b) Un número mayor que seis: $\frac{1}{4}$

c) Un número par: $\frac{1}{2}$

d) Un número menor que 3: $\frac{1}{4}$

e) Un número par menor que 5: $\frac{1}{4}$

f) Un número impar mayor o igual a 5: $\frac{1}{4}$



2. Se lanza una moneda al aire. Anota si es más probable que salgan dos caras en cuatro lanzamientos o tres caras en seis lanzamientos, y explica por qué.

R. T. Es la misma probabilidad, pues en ambos casos se considera que sale cara en la mitad de las veces que se hacen los lanzamientos.

3. Lee y contesta.
En el pueblo A hay 120 mujeres y 150 hombres; en el pueblo B, 100 hombres y 80 mujeres. Al reunir a la gente de ambos pueblos, se elige una al azar. Calcula lo que se pide y exprésalo como porcentaje.

a) La probabilidad de que sea hombre: 50.6%

b) La probabilidad de que sea una mujer del pueblo B: 17.8%

c) La probabilidad de que sea una persona del pueblo A: 60%

4. Lee y lleva a cabo lo que se solicita.
Ramón es un poco despistado. En un cajón de su clóset tiene ocho calcetines negros, cuatro blancos y seis azules, todos ellos sueltos. Un día que se le hace tarde para llegar a clase toma dos calcetines sin fijarse en su color y se los pone.

- Calcula la probabilidad de que…

  a) ambos sean negros: $\frac{56}{306}$

  b) ambos sean del mismo color: $\frac{98}{306}$

  c) al menos uno de ellos sea negro: $\frac{216}{306}$

NOTA: Esta actividad se resolvió utilizando probabilidad condicional pues son demasiadas las combinaciones de parejas que pueden formarse con los calcetines.

5. Calcula las probabilidades en una familia que tiene cuatro hijos.

a) Todos los hijos tienen el mismo sexo: $\frac{2}{16}$

b) Uno es niño y las otras tres, niñas: $\frac{4}{16}$

c) Hay una niña y los otros tres son niños: $\frac{4}{16}$

6. Los alumnos de tercero de secundaria que usan anteojos se distribuyen conforme a los datos de esta tabla.

	Niñas	Niños
Usa anteojos.	4	2
No usa anteojos.	10	10

Si se elige al azar a una persona de la clase, calcula las probabilidades.

a) Sea niña. $\frac{14}{26}$

b) Use anteojos. $\frac{8}{26}$

c) Sea un niño y use anteojos. $\frac{2}{26}$

7. Imagina que lanzas un dado de seis caras y relaciona cada evento con su conjunto de posibilidades.

a) Sale un número par. A = {1, 2, 3}

b) Cae un número menor o igual que 3. B = {2, 3, 5}

c) Se obtiene un número mayor que 7. C = {2, 4, 6}

d) Sale un número primo. D = { }

8. Responde.

Si arrojé cinco veces una moneda y en todas cayó “águila”, cuando la tire una sexta vez es más probable que caiga “sol”.

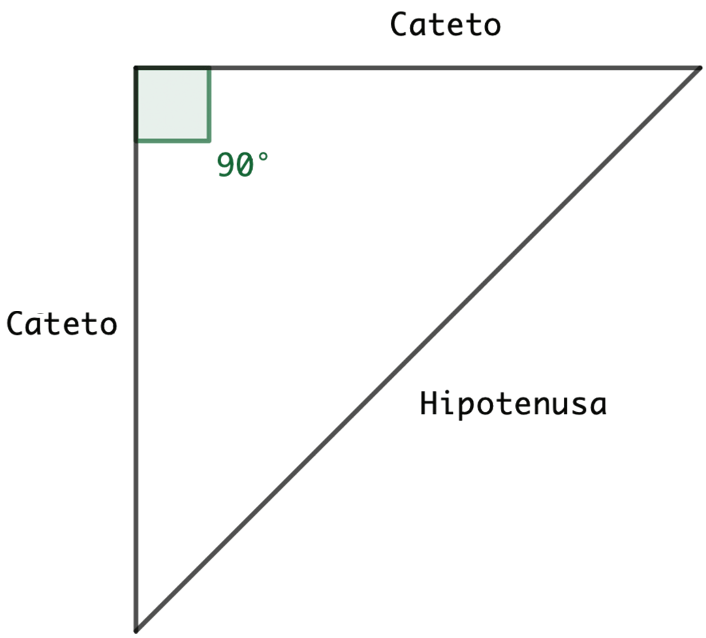
¿Por qué? R. T. Falso, porque los eventos son independientes.

TEN PRESENTE

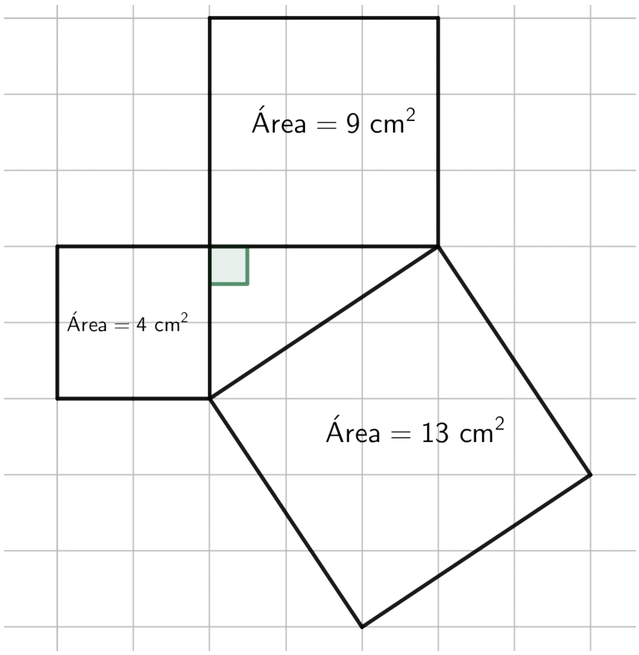
- El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los resultados que pueden ser posibles.
- La probabilidad de un evento puede expresarse como fracción, como número decimal o en porcentaje.
- La probabilidad de un evento siempre es un número entre 0 y 1, o si se expresa en porcentaje, entre 0% y 100%.
- Los eventos mutuamente excluyentes no pueden ocurrir simultáneamente.
- Los eventos complementarios, además de ser mutuamente excluyentes, cubren todo el espacio muestral.

Teorema de Pitágoras

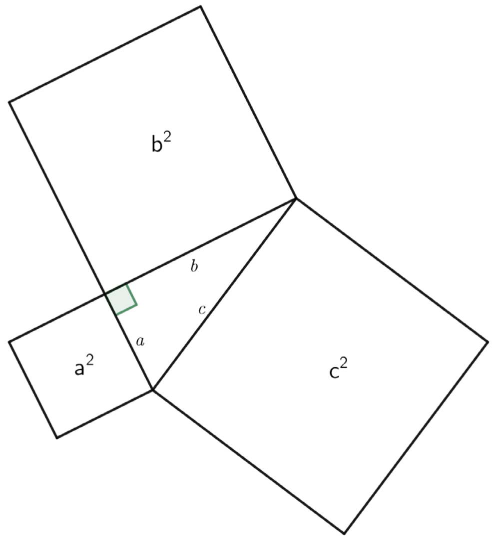
Los triángulos que tienen un **ángulo recto**, es decir, de 90°, se llaman **triángulos rectángulos**. A los dos lados que forman el ángulo recto se les denomina **catetos** y al otro lado (frente al ángulo recto) se le llama ***hipotenusa***.



Si se construyen cuadrados sobre los lados de cualquier triángulo rectángulo, siempre sucede que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Este resultado se conoce como el **teorema de Pitágoras**.

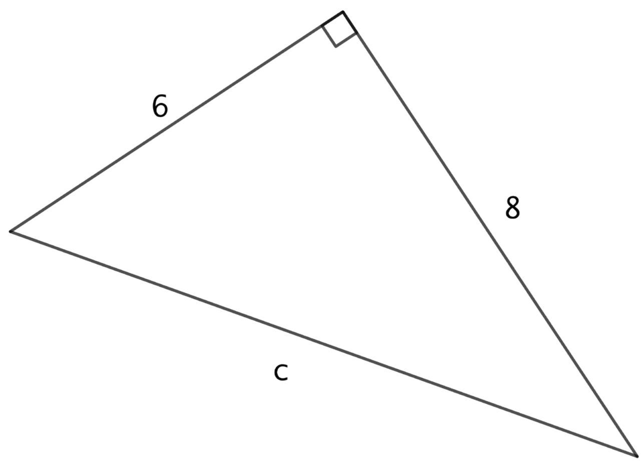


Algebraicamente, el teorema de Pitágoras se expresa así: si a y b son las medidas de los catetos en un triángulo rectángulo, y c es la medida de la hipotenusa, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. Es decir, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Si se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, la medida del tercer lado puede calcularse usando el teorema de Pitágoras, como en los siguientes ejemplos.

- Se conocen las medidas de los dos catetos.



Como los catetos miden 6 y 8 unidades, se debe cumplir que $6^2 + 8^2 = c^2$; es decir, $c^2 = 36 + 64 = 100$.

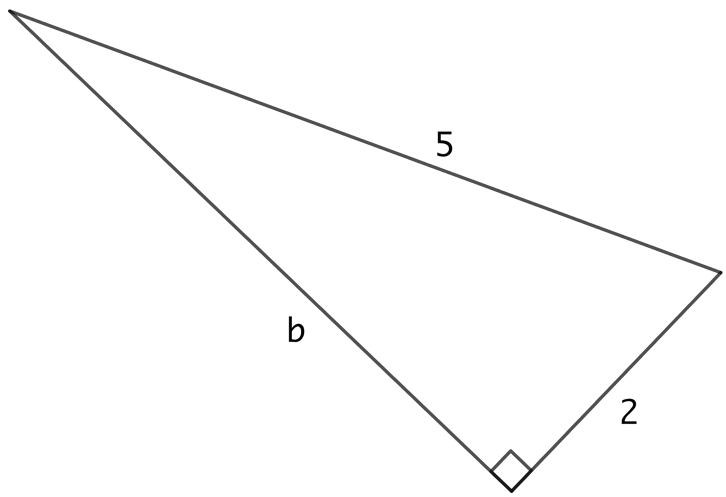
Este video explica, con ejemplos concretos, los significados geométrico y algebráico del teorema de Pitágoras.
www.e-sm-com-mx/CeS-M3-07

El siguiente video cuenta la historia de un juicio real en que se usó el teorema de Pitágoras para dictar sentencia.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-08

Si $c^2 = 100$, significa que c es un número que multiplicado por sí mismo da como resultado 100; es decir, c es la raíz cuadrada de 100, que puede ser 10 o -10 (los números positivos tienen dos raíces: una positiva y otra negativa).

Como las distancias o longitudes son siempre positivas, entonces $c = 10$, es decir, la hipotenusa mide 10 unidades. Con este valor de c se cumple la igualdad $6^2 + 8^2 = 10^2$.

- Se conocen las medidas de la hipotenusa y de un cateto.



Como un cateto mide 2 unidades y la hipotenusa 5 unidades, se debe cumplir que $2^2 + b^2 = 5^2$; al despejar b^2 se obtiene $b^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$.

Si $b^2 = 21$, significa que b es la raíz cuadrada de 21, que es aproximadamente 4.58 (de nuevo, tomamos la raíz positiva). Esto es, el cateto b mide aproximadamente 4.58 unidades.

1. ¿Hasta qué altura llegará una escalera de 4 m de largo que se apoya contra una pared y está separada de ella 1.5 m?

Llegará a los 3.7 m

2. Considera que los números 3, 4 y 5 forman una terna pitagórica, y contesta.

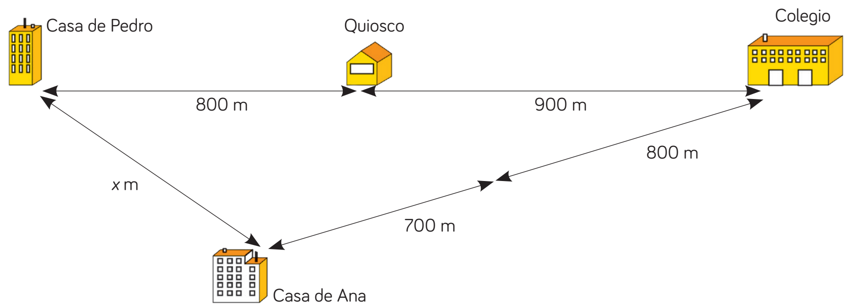
a) ¿Qué quiere decir eso? Que la suma del cuadrado de dos de ellos da como resultado el cuadrado del tercero.

b) ¿Realmente forman una terna pitagórica? Compruébalo. $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$

c) Si los multiplicamos por dos, ¿sigue siendo una terna pitagórica? Sí, pues $6^2 + 8^2 = 100 = 10^2$

3. Lee y resuelve.

Pedro sale de su casa a las 8:00 a. m. para ir al colegio. Tarda 6 min. en llegar al quiosco, donde se detiene 10 min a comentar los resultados del futbol y comprar dos chicles; luego demora 12 min caminando hasta el colegio.



Hoy va a comer en casa de su amiga Ana, así que en cuanto sale del colegio, a las 14:10, se va con ella; pasados 20 min, llegan al parque y se quedan jugando futbol durante 45 min. Como tienen apetito, salen de prisa y en 10 min llegan a casa de Ana.

- En el diagrama se indican su recorrido y las distancias. Obsérvalo detenidamente y responde.

a) ¿A qué hora Pedro llegó al colegio? A las 08:28 a. m.

b) ¿A qué hora llegó a comer? A las 15:25.

c) ¿Cuál es la diferencia del tiempo empleado entre la vuelta y la ida al colegio? 47 minutos.

d) Observa en el dibujo que la calle situada entre las casas de Pedro y de Ana es perpendicular a la que une la casa de Ana con el colegio.

Calcula su longitud aplicando el teorema de Pitágoras. ______

Suponiendo que el ángulo que forman las calles en la casa de Ana es recto, la distancia de la casa de Ana a la casa de Pedro es de 800 m.

TEN PRESENTE

- Los triángulos con un ángulo de 90° se denominan **triángulos rectángulos**.
- En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se conocen como *catetos* y el otro lado como *hipotenusa*.
- El teorema de Pitágoras nos dice que si a, b y c son, en ese orden, las medidas de los dos catetos y de la hipotenusa en un triángulo rectángulo, entonces se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, es decir, la suma de los cuadrados de los catetos vale lo mismo que el cuadrado de la hipotenusa.
- La hipotenusa siempre es el lado más largo en un triángulo rectángulo.
- Con el teorema de Pitágoras se puede calcular la medida de un lado del triángulo rectángulo si se conocen las medidas de los otros dos lados.

Matemáticas 3 | Trimestre 2

Ecuaciones cuadráticas. Probabilidad. Trigonometría

Prioriza Matemáticas 3 te ayudará a trabajar en los siguientes aprendizajes.

1. Resolver problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicar la fórmula general para resolver dichas ecuaciones
2. Calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto)
3. Explicitar y usar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente

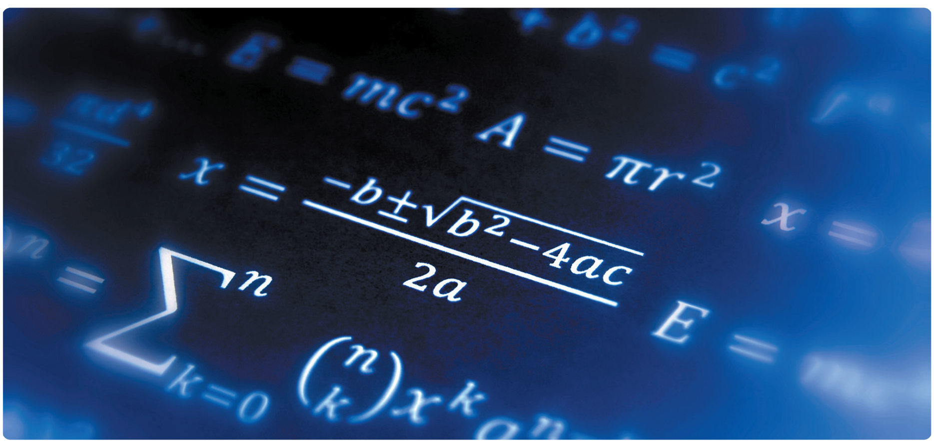
1

Fórmula general para ecuaciones cuadráticas

La *forma general* o *forma canónica* de una ecuación de segundo grado o cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números fijos y $a \neq 0$. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones cuadráticas están escritas en la forma general:

- $3x^2 + 2x + 1 = 0$; en este caso, $a = 3$, $b = 2$ y $c = 1$.
- $(3/2)x^2 - 2x + 5 = 0$; en este caso, $a = 3/2$, $b = -2$ y $c = 5$.
- $-0.5x^2 - 2x = 0$; en este caso, $a = -0.5$, $b = -2$ y $c = 0$.
- $4x^2 - 16 = 0$; en este caso, $a = 4$, $b = 0$ y $c = -16$.

Si una **ecuación cuadrática** no está escrita en la forma general, se puede manipular algebraicamente para reescribirla en la forma general, como se muestra en la página siguiente:



Fórmula general para ecuaciones cuadráticas

- Si la ecuación original es $2 - 2x + 4 = x^2$
  se resta x^2 en ambos lados de la igualdad: $2 - 2x + 4 - x^2 = x^2 - x^2$;
  se reacomodan los términos del lado izquierdo: $-x^2 - 2x + 2 + 4 = x^2 - x^2$;
  se suman o restan términos semejantes: $-x^2 - 2x + 6 = 0$.
- Si la ecuación original es $3x^2 - 4 = -x^2 + x$;
  se suma x^2 en ambos lados de la igualdad: $3x^2 - 4 + x^2 = -x^2 + x + x^2$;
  se reacomodan términos: $3x^2 + x^2 - 4 = -x^2 + x^2 + x$;
  se resta x en ambos lados: $3x^2 + x^2 - 4 - x = -x^2 + x^2 + x - x$;
  se suman o restan términos semejantes: $4x^2 - 4 - x = 0$;
  se reacomoda el lado izquierdo: $4x^2 - x - 4 = 0$.
- Si la ecuación original es $(x - 2)(x + 1) = 7$;
  se desarrolla el producto del lado izquierdo: $x^2 + x - 2x - 3 = 7$;
  se resta 7 en ambos miembros: $x^2 + x - 2x - 3 - 7 = 7 - 7$;
  se agrupan términos semejantes: $x^2 - x - 10 = 0$.

Cualquiera de las ecuaciones de segundo grado que están escritas en la forma general ($Ax^2 + Bx + C = 0$) pueden resolverse con esta *fórmula general.*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El símbolo ± indica que una de las soluciones se obtiene sumando

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

y la otra, restando esa misma expresión.

Así, las dos soluciones potenciales de una ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para **resolver una ecuación cuadrática** con la **fórmula general** solo hay que **sustituir *a*, *b* y *c*** por los valores correspondientes **y efectuar las operaciones**. Por ejemplo, para la ecuación $0.5x^2 - 2x - 6 = 0$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(0.5)(-6)}}{2(0.5)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{1}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 + 12}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{16}$$

$$x = 2 \pm 4$$

$$x = 2 \pm 4$$

$$x_1 = 2 + 4 = 6$$

$$x_2 = 2 - 4 = -2$$

Así, las dos soluciones de la ecuación son 6 y −2.

Observa cómo resolver ecuaciones cuadráticas con la fórmula general en el video del enlace.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-10

La expresión $b^2 - 4ac$, que aparece dentro de la raíz en la fórmula general, recibe el nombre de *discriminante*, y su valor determinará cuántas soluciones tiene la ecuación:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución (pues la raíz de 0 es 0, y restar 0 es lo mismo que sumar 0).
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones (una se obtiene sumando y la otra restando).
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución (pues no existen raíces de números negativos).

1. Identifica los coeficientes a, b y c de las ecuaciones de segundo grado y resuélvelas.

a) $x^2 - 9x + 8 = 0$

$x = 1$ y $x = 8$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$x = 2$ y $x = 4$

c) $x^2 - 5x + 4 = 0$

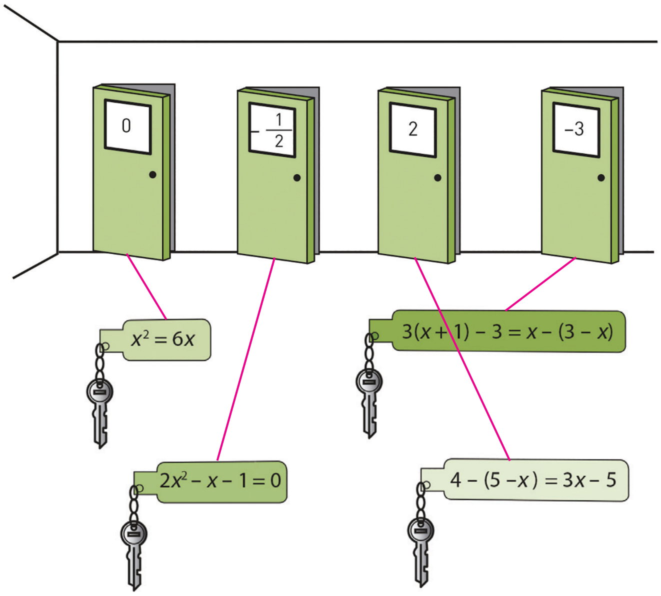
$x = 1$ y $x = 4$

2. Completa la tabla resolviendo las ecuaciones de segundo grado.

$ax^2 - bx + c = 0$	a	b	c	Soluciones
$-x^2 + 2x + 15 = 0$	–1	2	15	–3 y 5
$x^2 + 13x + 42 = 0$	1	13	42	–6 y –7
$x^2 = 6x$	1	–6	0	0 y 6
$3x^2 - 3x - 6 = 0$	3	–3	–6	–1 y 2
$4x^2 - 5 = 4$	4	0	–9	–1.5 y 1.5

3. Lee y haz lo que se solicita.

En un concurso de televisión hay cuatro puertas, detrás de cada una de ella hay premios. Al concursante le dan cuatro llaves que tienen en su llavero una ecuación anotada. En cada puerta se muestra un número que es la solución de la ecuación que la abre. Determina con qué llave se abre cada puerta. Escribe tus procedimientos.



TEN PRESENTE

- La forma general de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.
- Cualquier ecuación cuadrática puede reescribirse en la forma general.
- Si una ecuación cuadrática está escrita en la forma general, sus soluciones vienen dadas por la fórmula general.
- Una ecuación cuadrática tiene dos, una o ninguna solución, dependiendo de si el valor de $b^2 - 4ac$ es positivo, 0 o negativo, respectivamente.

2

Probabilidad, regla del producto

Se dice que dos eventos, A y B, son **independientes** cuando la probabilidad de que ocurra cualquiera de ellos es la misma si sucede el otro o no. Es decir, el hecho de que suceda B no cambia la probabilidad de que lo haga A, y viceversa. Por ejemplo:

- Si se lanzan dos monedas, los eventos A = "Que caiga águila en la primera" y B = "Que caiga sol en la segunda" son independientes; por tanto, la probabilidad de B es $\frac{1}{2}$, sin importar lo que suceda con la otra moneda.

Los eventos son independientes cuando la probabilidad de que sucedan no depende de que otro ocurra.

- Si se lanzan dos dados, los eventos A = "Que caiga número par en el primero" y B = "Que caiga 6 en el segundo" son independientes; por tanto, la probabilidad de B es $\frac{1}{6}$, sin importar lo que suceda con el otro dado.

Algunos juegos de dados pueden resultar complicados cuando se quieren calcular las probabilidades de ganar.

Cuando dos eventos, A y B, son **independientes**, la probabilidad de que ocurran ambos se calcula multiplicando las probabilidades de que suceda cada uno por separado, es decir P(A y B) = P(A) × P(B). Esta propiedad de los eventos independientes se conoce como *regla del producto*. Por ejemplo:

- Para el lanzamiento de un dado y una moneda juntos, y los eventos A = "Obtener águila en el volado" y B = "Obtener 6 en el dado", las probabilidades de A y B son $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{1}{6}$. Entonces, de acuerdo con la regla del producto, la probabilidad de que ocurran ambos eventos es $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$.

En el video se muestra cómo usar la regla del producto para calcular probabilidades de eventos independientes.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-11

- El resultado anterior coincide con el que se obtiene si se calcula la probabilidad "a pie", pues el espacio muestral tiene 12 elementos, como se muestra: {(1, A), (1, S), (2, A), (2, S), (3, A), (3, S), (4, A), (4, S), (5, A), (5, S), (6, A), (6, S)}, y solo uno de ellos es favorable (6, A). Siendo así, la razón "número de resultados favorables/elementos del espacio muestral" es $\frac{1}{12}$.

La **regla del producto** también es válida para **tres o más eventos independientes**. Por ejemplo:

- Para el lanzamiento de tres monedas, y los eventos A = "Obtener águila en la primera", B = "Obtener sol en la segunda" y C = "Obtener águila en la tercera" las probabilidades de A, B y C son $P(A) = \frac{1}{2}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Entonces, de acuerdo con la regla del producto, la probabilidad de que ocurran los tres eventos es $P(A, B \text{ y } C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$.
- En este caso el espacio muestral tiene 8 elementos, {(A, A, A), (A, A, S), (A, S, A), (A, S, S), (S, A, A), (S, A, S), (S, S, A), (S, S, S)}, y solo uno de ellos es favorable (A, S, A). Entonces la razón "número de resultados favorables/elementos del espacio muestral" es $\frac{1}{8}$.

1. Responde y explica el procedimiento que usarías para resolver lo planteado.

   a) Si se lanza una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila-águila?

   R. T. El espacio muestral de los eventos posibles es {(A, A), (A, S), (S, A), (S, S)}, por lo tanto, la probabilidad de (A, A) es $\frac{1}{4}$.

   b) Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 6-3?

   El espacio muestral está conformado por 36 eventos, de los cuales, (6, 3) o (3, 6) son los que interesan; por lo tanto, la probabilidad de obtenerlos es $\frac{1}{18}$.

   c) Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener número par en ambos?

   De las 36 opciones posibles en los lanzamientos, en nueve de ellos hay dos pares; por lo tanto, la probabilidad buscada es $\frac{1}{4}$.

2. Lee y responde.

En una caja hay pelotas azules, verdes y blancas. No se sabe cuántas hay de cada tipo, pero sí que la tercera parte del total de pelotas son azules y la mitad, verdes.

a) Si se hacen dos extracciones con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener una pelota azul en ambos casos?

Supongamos que la cantidad de pelotas azules, verdes y blancas está dada respectivamente por x, y y z; entonces, el total de pelotas que hay es $T = x + y + z$. Como las extracciones son con reemplazo, en cada momento la probabilidad buscada es $\frac{\frac{y+z}{2}}{T}$.

b) ¿Y de que la primera sea azul y la segunda, verde?

Si consideramos lo mismo de la pregunta anterior, la probabilidad de que la primera sea azul es $\frac{\frac{y+z}{2}}{T}$ y, como el total de pelotas no cambia, la probabilidad de que la segunda sea verde es $\frac{x+z}{T}$.

c) Si en la caja hubiera seis pelotas en total, ¿las probabilidades que anotaste en los incisos a) y b) cambiarían?

No, la probabilidad del inciso a) quedaría como $\frac{1}{3}$ y las probabilidades del b) quedarían como $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

d) Y si hubiera 24 pelotas, ¿seguirían siendo las mismas probabilidades?

Sí en ambos casos, porque el hecho de que las pelotas sean 6 o 24 son solo casos particulares de la generalización que se encontró en el inciso a).

3. En un examen de opción múltiple hay cuatro opciones de respuesta para cada pregunta, de las cuales solo una es correcta. Completa la tabla y responde.

Preguntas contestadas al azar	1	2	3	4
Probabilidades de acertar todas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$
Probabilidad de fallar al menos una	$\frac{3}{4}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{120}{256}$

a) ¿Cómo calcularon las probabilidades de la primera fila?

R. T. Responder cada pregunta son eventos independientes, por lo que la probabilidad de acertar en 2, 3 o 4 es el producto de las probabilidades de aceptar en cada una.

b) ¿Y las de la segunda fila?

R. T. Este evento se compone por otros; por ejemplo, para responder cuatro preguntas al azar, se consideran las siguientes opciones.

- Fallar una y atinar tres $\left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right)$
- Fallar dos y atinar dos $\left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right)$
- Fallar tres y atinar una $\left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right)$
- Fallar todas $\left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$

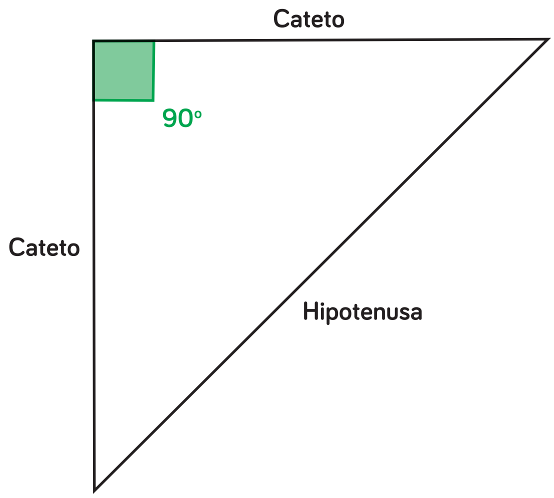
La probabilidad de cada opción se calcula con productos al ser eventos independientes y, al final, se suman todas ellas.

TEN PRESENTE

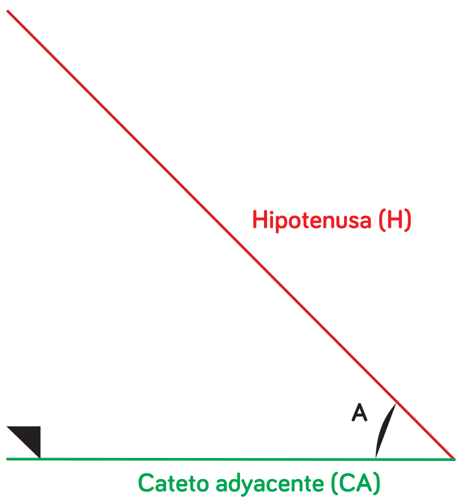
- Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.
- La probabilidad de que ocurran juntos dos eventos independientes, A y B, se calcula con la regla del producto: P(A y B) = P(A) × P(B).
- La regla del producto también puede usarse para tres o más eventos independientes: P(A y B y C) = P(A) × P(B) × P(C).

Razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo, los dos lados que forman el ángulo recto se conocen como **catetos** y el otro lado (frente al ángulo recto) como **hipotenusa**.



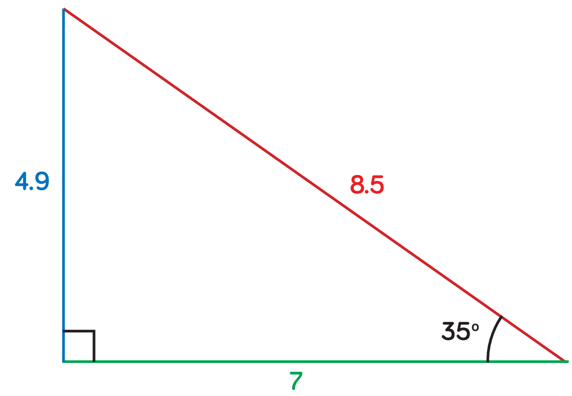
A partir de un **ángulo agudo** *A* en cualquier triángulo rectángulo, se definen las siguientes razones trigonométricas (cocientes entre medidas de los lados):



- El cociente que se obtiene al dividir la medida del cateto opuesto (CO) entre la medida de la hipotenusa (H) se llama **seno del ángulo** *A*, y se denota sen A = CO/H.
- El cociente que se obtiene al dividir la medida del cateto adyacente (CA) entre la medida de la hipotenusa (H) se llama **coseno del ángulo** *A*, y se denota cos A = CA/H.
- El cociente que se obtiene al dividir la medida del cateto opuesto (CO) entre la medida del cateto adyacente (CA) se llama **tangente del ángulo** *A*, y se denota tan A = CO/CA.

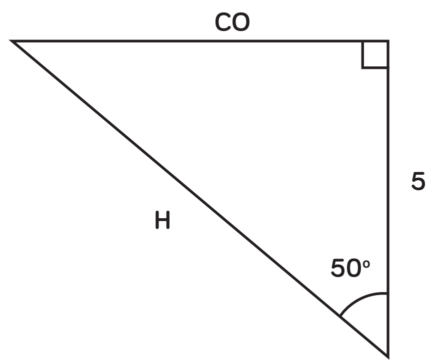
  Por ejemplo, en el triángulo mostrado y para el ángulo de 35°

- sen 35° = 4.9/8.5 = 0.57
- cos 35° = 7/8.5 = 0.82
- tan 35° = 7/8.5 = 0.7



Si se conocen las medidas de un lado y un ángulo agudo del triángulo rectángulo, se pueden usar **razones trigonométricas** para encontrar las medidas de los otros lados.

Por ejemplo, para un triángulo con un ángulo de 50° y cuyo cateto adyacente mide 5 unidades

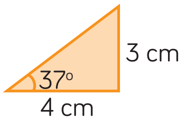


- cos 50° = CA/H; cos 50° = 5/H; H = 5/cos 50°; y como cos 50° = 0.64 (este valor se puede obtener con cualquier calculadora científica), entonces... H = 5/0.64 = 7.8;
- tan 50° = CO/CA; tan 50° = CO/5; CO = 5(tan 50°); y como tan 50° = 1.19, entonces CO = 5/1.19 = 5.95.
- Otra opción para calcular la medida del cateto opuesto es usar el teorema de Pitágoras con las dos medidas que ya se conocían (CA y H): 7.82 = 52 + (CO)2; CO2 = 7.82 − 52; CO2 = 35.84. La medida del cateto opuesto es entonces la raíz de 35.84, que es aproximadamente 5.98.

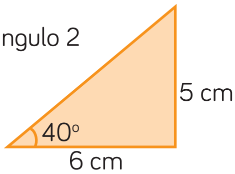
Observa cómo resolver problemas de geometría mediante razones trigonométricas en el video.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-12

1. Calcula y escribe en la primera tabla las razones trigonométricas para el ángulo indicado en cada triángulo. Haz lo mismo en la segunda tabla para el otro ángulo agudo de cada triángulo.

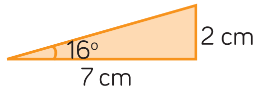
Triángulo 1



Triángulo 2



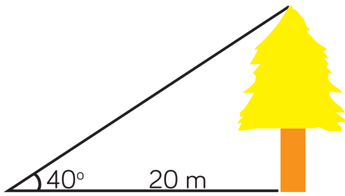
Triángulo 3



Triángulo	Seno	Coseno	Tangente
1	Seno (37°) = $\frac{3}{5}$	Coseno (37°) = $\frac{4}{5}$	Tangente (37°) = $\frac{3}{4}$
2	Seno (40°) = $\frac{5}{7.8}$	Coseno (40°) = $\frac{6}{7.8}$	Tangente (40°) = $\frac{5}{6}$
3	Seno (16°) = $\frac{2}{7.3}$	Coseno (16°) = $\frac{7}{7.3}$	Tangente (16°) = $\frac{2}{7}$

Triángulo	Seno	Coseno	Tangente
1	Seno (53) = $\frac{4}{5}$	Coseno (53) = $\frac{3}{5}$	Tangente (53) = $\frac{4}{3}$
2	Seno (50) = $\frac{6}{7.8}$	Coseno (50) = $\frac{5}{7.8}$	Tangente (50) = $\frac{6}{5}$
3	Seno (74) = $\frac{7}{7.3}$	Coseno (74) = $\frac{2}{7.3}$	Tangente (74) = $\frac{7}{2}$

2. Responde.



a) ¿Cuánto mide la altura del árbol?

Mide 16.8 m.

b) Explica el procedimiento que utilizaste para calcularla.

R. T. La altura del árbol (x) está dada por

x = 20 – tan(40°) = 20 – 0.84 = 16.8

3. Observa las imágenes y responde.

Figura 1

Figura 2

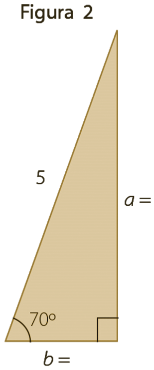
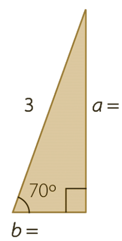


Figura 3



a) ¿Cuál es el valor del coseno de 70°?

cos (70°) = 0.34

b) ¿Cuál es el valor del seno de 70°?

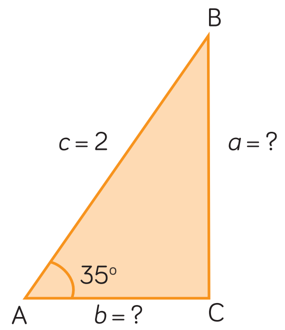
sen (70°) = 0.94

c) Calcula las medidas que faltan en las figuras 2 y 3.

En la figura 2: a = 4.7 y b = 1.7

En la figura 3: a = 2.82 y b = 1.02

4. Observa y lleva a cabo lo que se solicita.



- Anota el proceso que sigues para calcular la medida de la hipotenusa del triángulo anterior.

Para calcular el valor de los catetos: sabemos que sen (35°) = $\frac{a}{2}$ = 0.57 y cos(35°) = $\frac{b}{2}$ = 0.82; por lo tanto, a = 1.14 y b = 1.64

TEN PRESENTE

- En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto son los catetos; el otro lado es la hipotenusa.
- El cateto adyacente a un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es el cateto junto a dicho ángulo ("adyacente" significa "junto a" o "al lado de").
- El cateto opuesto a un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es el cateto frente a dicho ángulo.
- Las razones trigonométricas son cocientes entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.
- Si se conocen las medidas de un ángulo agudo y un lado de un triángulo rectángulo, las medidas de los lados restantes se pueden calcular mediante razones trigonométricas.

Matemáticas 3 | Trimestre 3

Razón de cambio. Ecuaciones. Volumen

Prioriza Matemáticas 3 te ayudará a trabajar en los siguientes aprendizajes.

1 Calcular y analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificar la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa

2 Resolver problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formular problemas a partir de una ecuación dada

3 Estimar y calcular del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas

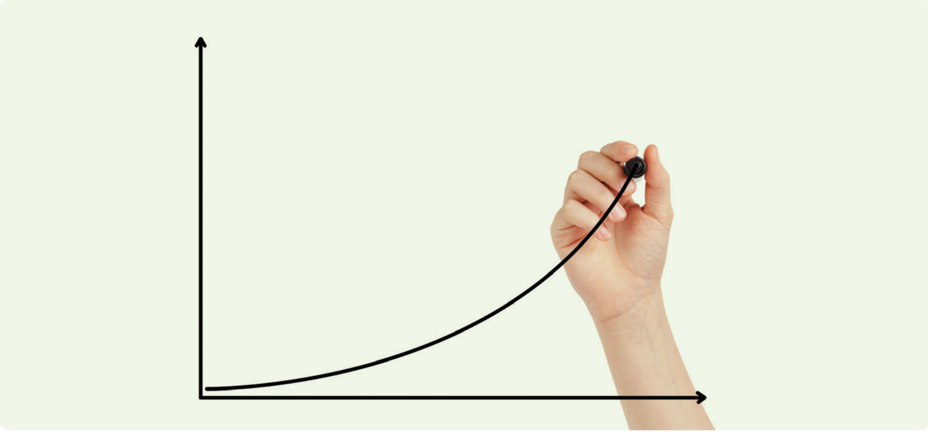
1

Razón de cambio

En una relación entre dos cantidades variables (x, y), el **cambio** (aumento o disminución) en una variable dividido entre el cambio correspondiente en la otra variable se llama **razón de cambio**. Por ejemplo, si a un tanque con 20 L de agua se le agregan 5 L de líquido por minuto, tenemos:

x (tiempo en minutos)	0	10	2	5	1
$20 + 5x$	$20 + 5(0) = 20$	$20 + 5(10) = 70$	$20 + 5(2) = 30$	$20 + 5(5) = 45$	$20 + 5(1) = 25$
y (litros de agua en el tanque)	20	70	30	45	25

Las razones de cambio pueden representarse gráficamente.



x	0		10		2		5		1
Δ_x (cambio en x)		+10		−8		+3		−4	
y	20		70		30		45		25
Δ_y (cambio en y)		+50		−40		+15		−20	
Δ_y/Δ_x		+50 / +10 = 5		− 40 / − 8 = 5		+15 / + 3 = 5		−20 / −4 = 5	

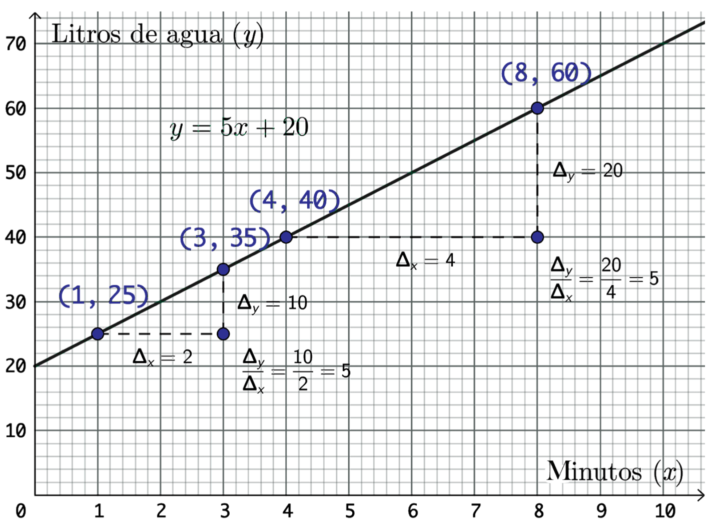
Si se modifica la medida del lado de un cuadrado para hacer variar su área:

x (medida del lado en cm)	0	5	3	10	2
x^2	$0^2 = 0$	$5^2 = 25$	$3^2 = 9$	$10^2 = 100$	$2^2 = 4$
y (área en cm²)	0	25	9	100	4

x	0		5		3		10		2
Δ_x (cambio en x)		+5		−2		+7		−8	
y	0		25		9		100		4
Δ_y (cambio en xy)		+25		−16		+91		−96	
Δ_y/Δ_x		+25 / + 5 = 5		−16 / −2 = 8		+91 / +7 = 13		−96 / −8 = 12	

Si la **razón de cambio** entre dos cantidades es **constante** (no varía), significa que la **relación** es **lineal** (su gráfica es una línea recta) y **la razón de cambio corresponde a la pendiente de la recta** respectiva.

Por ejemplo, en la situación anterior en la que a un tanque con 20 L de agua se le agregan 5 L de líquido por minuto, tenemos:



En el enlace encontrarás un video que muestra cómo resolver ejercicios de razón de cambio y pendientes de rectas.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-14

Calcular la razón de cambio nos ayuda a medir, por ejemplo, a qué velocidad avanza un objeto.

- La ecuación de la recta es $y = 5x + 20$, donde y representa la cantidad de agua y x, los minutos transcurridos (la cantidad de agua es 20 litros iniciales más 5 litros por cada minuto que pasa).
- Como estudiaste en cursos anteriores, la pendiente de una recta es el número que multiplica a la variable x en la ecuación, que en este caso es 5.
- Al pasar de 1 a 3 minutos, el cambio en x es 2 (la diferencia entre 3 y 1), lo que se escribe como $\Delta_x = 3 - 1 = 2$. Al pasar de 1 a 3 minutos, la cantidad correspondiente de agua pasa de 25 a 35 litros, es decir, el cambio en y es 10 $(35 - 25)$, lo que se escribe como $\Delta_y = 35 - 25 = 10$.
- El cociente "cambio en y/cambio en x" es entonces $\Delta_y/\Delta_x = 10/2 = 5$, que corresponde a la pendiente de la recta.
- Al pasar de 4 a 8 minutos, el cambio en x es 4 $(8 - 4)$, es decir, $\Delta_x = 8 - 4 = 4$. Al pasar de 4 a 8 minutos, la cantidad de agua pasa de 40 a 60 litros, es decir, $\Delta_y = 60 - 40 = 20$.
- El cociente "cambio en y/cambio en x" es entonces $\Delta_y/\Delta_x = 20/4 = 5$, que nuevamente coincide con la pendiente de la recta.

1. Lee y responde.

Cristina y Carlos son dos corredores que entrenan juntos. Ayer, Cristina corrió las dos horas y media que dura el entrenamiento a 7 km/h, mientras que Carlos corrió la primera media hora a 6 km/h; después, una hora a 7 km/h; y la última hora, a 8 km/h.

a) ¿Qué distancia recorrió cada uno?

Cristina corrió 17.5 km y Carlos corrió 18 km.

b) Además de cuando estuvieron juntos en la salida, ¿volvieron a estarlo en algún momento del entrenamiento?

Sí, después de dos horas.

2. Encuentra la expresión algebraica que relaciona las variables de la tabla.

x	2	3	4	5
y	9	14	19	24

Expresión algebraica: $y = 5x - 1$

3. Lee la situaciones y resuelve.

Un obrero tiene un sueldo fijo mensual de $6000.00, pero por cada hora extra recibe $75.00.

a) Expresa algebraicamente el ingreso mensual (i) en relación con las horas extra trabajadas (h) y di cuáles son la pendiente y la ordenada al origen.

$i = 6000 + 75h$;

75 es la pendiente y 6000 es la ordenada al origen.

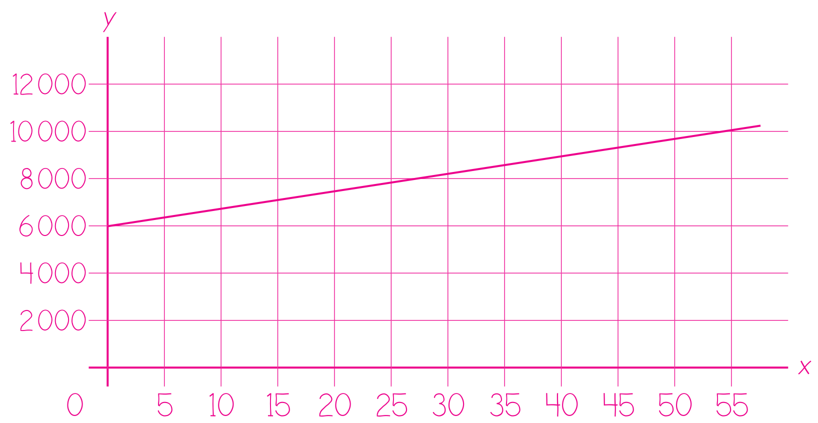
b) ¿Qué significado tiene en este problema la razón de cambio (pendiente)?

R. T. Es el ingreso que se genera por las horas extra trabajadas.

c) ¿Y la ordenada al origen?

El sueldo base.

d) Representa gráficamente la situación.



TEN PRESENTE

- La razón de cambio en una relación entre dos cantidades variables corresponde al cambio en una de las cantidades dividido entre el cambio correspondiente en la otra.
- Cuando la razón de cambio es constante, la relación es lineal.
- La razón de cambio en cualquier relación lineal coincide con la pendiente de la recta correspondiente.

2 Problemas y ecuaciones

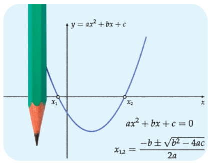
Una ecuación es una **igualdad** (tiene el signo =) en que hay una o más **cantidades desconocidas**, que están representadas mediante literales (letras). Por ejemplo:

- $3x - 1 = 2x + 3$
- $(x - 3)(x + 2) = 0$

Resolver una ecuación significa **encontrar el valor** de la incógnita que hace la igualdad **verdadera**. Por ejemplo, para las ecuaciones anteriores:

- $x = 4$ es solución de la ecuación $3x - 1 = 2x + 3$, pues si se sustituye x por 4 en la ecuación, se obtiene $3(4) - 1 = 2(4) + 3$; $12 - 1 = 8 + 3$; $11 = 11$.
- $x = 3$ es solución de la ecuación $(x - 3)(x + 2) = 0$, pues $(3 - 3)(3 + 2) = (0)(5) = 0$. También $x = -2$ es solución de dicha ecuación, pues $(-2 - 3)(-2 + 2) = (-5)(0) = 0$.

Si se hace la misma operación en ambos miembros de una ecuación (a la izquierda y a la derecha del signo =), la **igualdad se mantiene**. Por ejemplo:



Las ecuaciones nos ayudan a encontrar valores desconocidos a partir de los datos que tenemos.

$$2z^2 - 9 = z^2$$
$$2z^2 - 9 + 9 = z^2 + 9$$
$$2z^2 = z^2 + 9$$
$$2z^2 - z^2 = z^2 + 9 - z^2$$
$$z^2 = 9$$
$$\sqrt{z^2} = \sqrt{9}$$
$$z = \pm 3$$

Para **verificar** si un número dado es **solución** de una ecuación, se **sustituye** dicho número **por la incógnita**. Si se cumple la igualdad, el número es solución de la ecuación.

- Para la ecuación $3z - 8 = 2z$ y el número 8:
  $3(8) - 8 = 2(8)$; $24 - 8 = 16$; $16 = 16$. La igualdad se cumple, 8 es solución de la ecuación.
- Para la ecuación $2x^2 + 5x - 2 = 1$ y el número 0.5:
  $2(0.5^2) + 5(0.5) - 2 = 2(0.25) + 2.5 - 2 = 0.5 + 2.5 - 2 = 3 - 2 = 1$.
  La igualdad se cumple, 0.5 es solución de la ecuación.

Analiza cómo plantear y resolver problemas con sistemas de ecuaciones en el video del siguiente enlace.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-15

Resolver un **sistema de dos ecuaciones** lineales con dos incógnitas es encontrar una pareja de números (uno para cada incógnita) que haga verdaderas ambas igualdades, como se muestra en los ejemplos.

- Para el sistema $x + 8 = y$, $y = 2x$, la pareja de números $x = 8$, $y = 16$ es solución de ambas ecuaciones, pues al asignar esos valores para las variables en ambas ecuaciones, se obtiene:
  $x + 8 = y$, $8 + 8 = 16$; $16 = 16$ (la igualdad es verdadera);
  $y = 2x$; $16 = 2(8)$; $16 = 16$ (la igualdad es verdadera).
- Para el sistema $3y + 1 - x = 0$, $2y + 4 = x$, la pareja de números $x = 10$, $y = 3$ es solución de ambas ecuaciones, pues al asignar esos valores para las variables en ambas ecuaciones, se obtiene:
  $3y + 1 - x = 0$, $3(3) + 1 - 10 = 0$; $0 = 0$;
  $2y + 4 = x$; $16 = 2(3) + 4 = 10$; $6 + 4 = 10$; $10 = 10$

1. Lee el problema y resuelve lo que se solicita.

   Las edades de Andrea y Carmen suman 75 años, y la diferencia entre la edad de Andrea y la de Carmen es 3.

   a) ¿Cuántos años tiene Carmen?

   Carmen tiene 36 años.

   b) ¿Cuántos años tiene Andrea?

   Andrea tiene 39 años.

2. Lee la situación y responde.

   Un granjero vende $\frac{5}{7}$ de las gallinas que tiene. Después, compra 60 y tiene ahora el doble de las que tenía antes de la venta.

   ▸ ¿Cuántas gallinas tenía antes de la venta?

   Tenía 35 gallinas antes de la venta.

3. Resuelve el problema.

   Juan y Luis juntan su dinero para comprar un regalo a su mamá. Juan cuenta con \$210.00 más que Luis y juntos ahorran \$370.00. ¿Qué cantidad de dinero tiene cada uno?

   a) Dinero de Juan: \$290.00

   b) Dinero de Luis: \$80.00

Gracias a una ecuación podemos saber cuánto dinero ahorra o gasta una persona.

4. Las tres cifras de un número suman 16. Si restamos al número el que resulta de invertir sus cifras, se obtiene 495; además, la cifra de las decenas es el resultado de restar la cifra de las unidades a la cifra de las centenas. ¿Cuál es el número?

   - Número: 358

5. Irma le dice a su hijo Santiago: "Cuando transcurra la cuarta parte de los años que tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual". Él le contesta: "Sí, pero hace tan solo cinco años, tu edad era siete veces la mía". ¿Cuál es la edad de Santiago y la edad de Irma?

   a) Edad de Santiago: 10 años

   b) Edad de Irma: 40 años

6. En una reunión hay 43 personas en total entre hombres y mujeres. Si se fueran tres hombres, habría el triple de mujeres que de hombres.

   - ¿Cuántas mujeres y cuántos hombres hay en total en la fiesta?

     a) Número de hombres: Hay 13 hombres

     b) Número de mujeres: Hay 30 mujeres

7. Para obtener 1 kg de café tipo *A*, se mezclan 500 g de café tipo *B* y 500 g de café tipo *C*. Si el kilogramo de café tipo *B* cuesta $40.00 y el tipo *C*, $20.00, ¿cuántos kilogramos de tipo *B* y de tipo *C* deben mezclarse para obtener 40 kg del café tipo *A* que tiene un costo de $30.00?

   a) Cantidad de café del tipo *B*: 20 kg

   b) Cantidad de café del tipo *C*: 20 kg

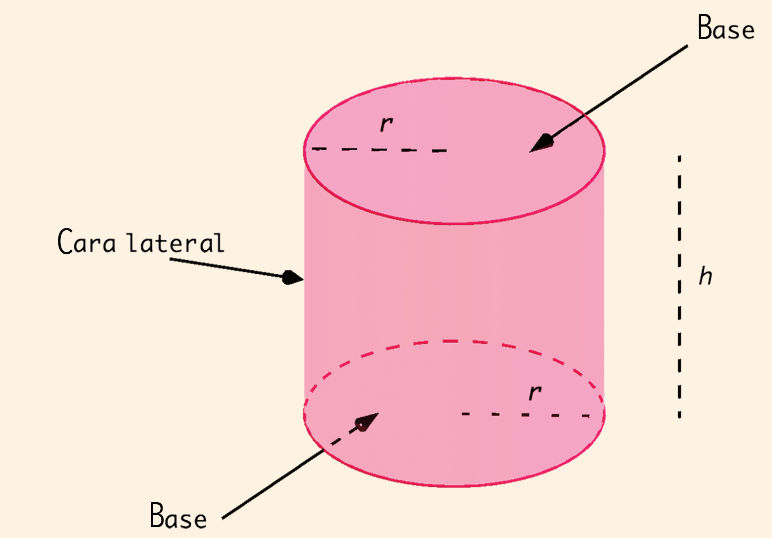
TEN PRESENTE

- Una ecuación es una igualdad con cantidades desconocidas.
- Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita que hace verdadera la igualdad.
- Al hacer la misma operación en ambos miembros de una ecuación, esta se mantiene.
- Para verificar que un número es solución de una ecuación, hay que sustituirlo por la incógnita y ver si se cumple la igualdad.
- La solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es una pareja de números que hace verdaderas ambas igualdades.

Volumen de cilindros y conos

Un **cilindro** es un cuerpo geométrico limitado por dos caras planas circulares llamadas **bases**, paralelas e iguales, y una cara lateral curva.

La **altura** del cuerpo se suele representar con la letra *h* y el **radio** de los círculos, con la letra *r*.



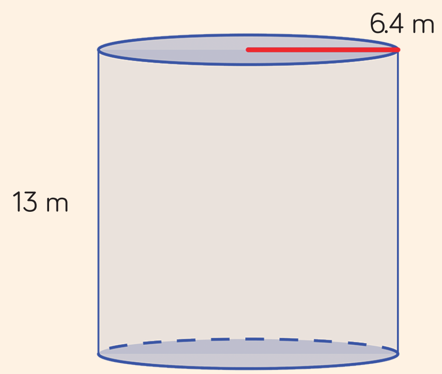
El **volumen** de cualquier cilindro se calcula con el mismo procedimiento que para los prismas: se multiplica el **área de la base por la altura**, es decir:

$$V = A_b(h).$$

Pero como la base del cilindro es un círculo, su área es $A_b = \varpi r^2$ y entonces la fórmula para el volumen se convierte en:

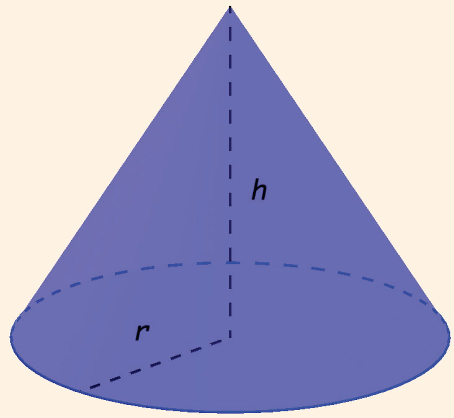
$$V = \varpi r^2 h.$$

Por ejemplo, para el cilindro mostrado:



$$V = \varpi r^2 h = \varpi(6.4\text{ m})^2(13\text{ m}) = \varpi(40.96\text{ m}^2)(13\text{ m}) = \varpi(532.48\text{ m}^3) = 1672.84\text{ m}^3$$

Un **cono** es un cuerpo geométrico limitado por **una cara plana circular** llamada *base* y **una cara lateral curva**. La **altura** del cuerpo se suele representar con la letra *h*; y el **radio** del círculo, con la letra *r*.



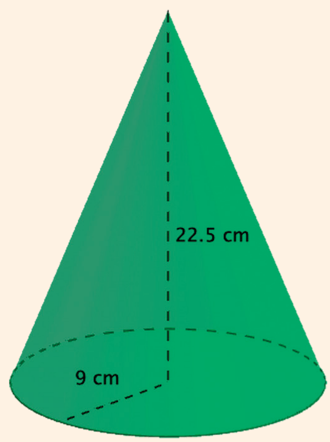
El volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y altura, y como la fórmula para el volumen de un cilindro es:

$$V = \varpi r^2 h.$$

Entonces el volumen de un cono se calcula con la fórmula:

$$V = (\varpi r^2 h)/3.$$

Por ejemplo, para el cono mostrado:



$V = (\varpi r^2 h)/3 = [\varpi(9\text{ cm})^2(22.5\text{ cm})]/3 = [\varpi(81\text{ cm}^2)(22.5\text{ cm})]/3 = \varpi(1822.5\text{ cm}^3)/3 = 607.5\varpi\text{ cm}^3 = 1908.5\text{ cm}^3$.

Tanto la fórmula del volumen del cilindro, $V = \varpi r^2 h$, como la del cono, $V = (\varpi r^2 h)/3$, tienen **tres variables** o cantidades que pueden despejarse para expresarse en función de las otras dos: V (el volumen, que ya aparece despejado en la fórmula usual), r (el radio de la base) y h (la altura). Por ejemplo:

En estos videos se muestra cómo calcular volúmenes de cilindros y conos.
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-16
www.e-sm.com.mx/CeS-M3-17

Para despejar h en la fórmula del volumen del cono:

$$V = (\varpi r^2 h)/3.$$

Se multiplican por 3 ambos miembros de la ecuación y se simplifica:

$$3V = 3(\varpi r^2 h)/3;\ 3V = \varpi r^2 h.$$

Se dividen entre ϖr^2 ambos miembros y se simplifica:

$$3V/\varpi r^2 = \varpi r^2 h/\varpi r^2;\ 3V/\varpi r^2 = h.$$

Así, la fórmula para calcular la altura de un cono, si se conocen su volumen y radio, es:

$$h = 3V/\varpi r^2.$$

1. Lee y responde.

Un recipiente cilíndrico mide 45 cm de alto y su radio es de 15 cm. Se quiere llenar de agua usando vasos de 12 cm de alto y 6 cm de radio.

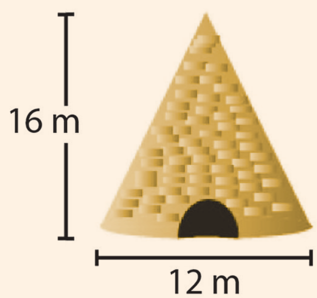
- ¿Cuántos vasos se necesitan para llevar el recipiente de agua?

Se necesitan 23.44 vasos para llenar el recipiente.

2. Completa la tabla con las posibles medidas de una botella cilíndrica que tenga una capacidad de 1.5 litros. R. T.

	Altura	Radio de la base	Volumen (en cm³)	Capacidad (en L)
Botella	10	6.9	1500	1.5

3. Observa la imagen y responde.



Se necesita llenar el silo anterior de granos. En cada viaje un camión puede llevar solo 24 m³.

a) ¿Cuál es la capacidad del silo? 603.2 m^2.

b) ¿Cuántos viajes se necesitan hacer para llenar el silo? Se deben hacer 26 viajes.

4. Resuelve el problema.

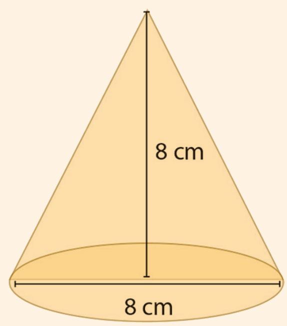
En una tienda una señora busca un vaso de cristal que tenga la mayor capacidad. Las opciones que tiene son las siguientes.

a) Un vaso con radio de base de 7 cm y altura de 13 cm
b) Un vaso con radio de base de 9 cm y altura de 11 cm
c) Un vaso con radio de base de 5 cm y altura de 17 cm

▸ ¿Qué capacidad tiene cada vaso y cuál debería elegir?

Considerando que los vasos son cilíndricos a) tiene una capacidad de 2 001.2 cm^3, el vaso b) tiene una capacidad de 2 799.2 cm^3 y vaso c) tiene una capacidad de 1335.2 cm^3, por lo que debería elegir el vaso b).

5. Analiza la figura que representa un pisapapeles de vidrio y lleva a cabo lo que se solicita.



a) 1 cm^3 de vidrio pesa 2.5 g. Calcula cuánto pesa el pisapapeles.

Pesa 335.1 g.

b) ¿Cuánto pesaría si su altura disminuyera 3 cm?

Pesaría 209.4 g.

TEN PRESENTE

- Un cilindro tiene dos caras planas circulares, paralelas e iguales, y una cara lateral curva.
- El volumen de un cilindro se calcula con la fórmula $V = A_b(h) = \varpi r^2 h$.
- Un cono tiene una cara plana circular y una cara lateral curva.
- El volumen de un cono se calcula con la fórmula $V = (\varpi r^2 h)/3$.
- En las fórmulas de volumen del cono y del cilindro, es posible despejar cualquiera de las tres variables (V, r, h) para expresarla en función de las otras dos.